خلاصه کل کتاب و نکات مهم و سوالات امتحانی ریاضی هشتم

تهیه کننده : اسماعیل عبدلی نشلجی(es.abdoli@gmail.com) – دبیر ریاضی و فیزیک کاشان

فصل اول :اعداد صحیح و گویا

قرینه هر عدد: آن عدد را در منفی می کنیم. $-(+۲) = -۲$ $\quad -(-۲) = +۲$

قرینه ، قرینه هر عدد برابر خود آن عدد می باشد. $-(-(+۲)) = +۲$ $\quad -(-(-۲)) = -۲$

جمع و تفریق اعداد صحیح و نمایش محوری آنها :

$(-۲) + (-۴) = -۶ \qquad (-۲) + (+۴) = +۲ \qquad (+۲) + (-۴) = -۲ \qquad (+۲) + (+۴) = +۶$

ضرب و تقیسم اعداد صحیح و نمایش محوری آنها:

$(-۲) \times (-۴) = +۸ \qquad (-۲) \times (+۴) = -۸ \qquad (+۲) \times (-۴) = -۸ \qquad (+۲) \times (+۴) = +۸$

اولویت عملیات ریاضی در محاسبات:

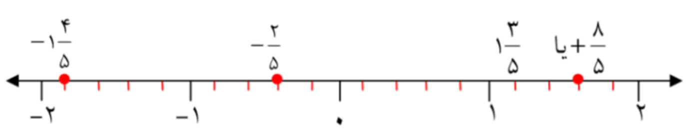
۱- پرانتز ۲- توان و رادیکال ۳- ضرب و تقسیم از چپ به راست ۴- جمع و تفریق از چپ به راست

مثال : $-۴ + (۶)^۲ \div \left(۳ \times (-۲)\right) - ۷ \div ۷ \times ۳ = -۴ + ۳۶ \div (-۶) - ۱ \times ۳ = -۴ - ۶ - ۳ = -۱۳$

اعداد گویا: کسرهای به شکل $\frac{a}{b}$ که a و b اعداد صحیح می باشند و مخرج مخالف صفر است.

نکته مهم: تمام اعداد صحیح , گویا می باشند.

نمایش اعداد گویا روی محور: نمایش عدد $\frac{۸}{۵}$: هر واحد را به ۵ قسمت تقسیم کرده و ۸ تای آن را انتخاب می کنیم.



نمایش اعدادی گویای مخلوط: نمایش عدد $۱\frac{۳}{۵}$: ابتدا ۱ را روی محور مشخص کرده و مانند قبل بین ۱ تا ۲ را به ۵ قسمت تقسیم کرده و ۳ تای آن را انتخاب می کنیم:

نکته مهم: برخی اعداد گویا به صورت کسر نیستند ولی می توان آنها را به کسر تبدیل کرد:

مثال : اعداد اعشاری : $\frac{16}{10}=1/6$ یا $-\frac{4}{10}=-0/4$ یا برخی رادیکال ها: $-\sqrt{4}=-2$

کسرهای مساوی : با ضرب و یا تقسیم صورت و مخرج کسرها در عددی مخالف صفر، کسرهای مساوی بدست می آیند.

$$\overset{\times 2}{} \qquad -\frac{3}{4}=-\frac{6}{8}=-\frac{9}{12}=-\frac{12}{16}=\dots \qquad \underset{\times 2}{}$$

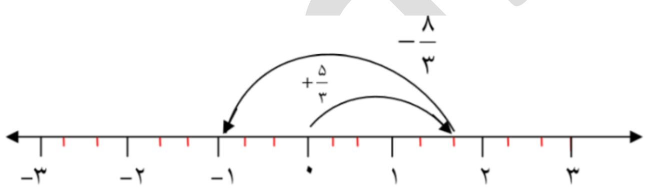
ساده کردن اعداد گویا: صورت و مخرج را به یک عدد مخالف صفر تقسیم می کنیم:

مثال: $\frac{(-18)(-4)}{(-9)(+10)}=-\frac{2\times 2}{5}=-\frac{4}{5}$

مثال : مقدار x را بدست آورید: $\frac{x+2}{2}=\frac{14}{4}\rightarrow x+2=7\rightarrow x=5$

جمع و تفریق اعداد گویا:

با کمک محور:



$(+\frac{5}{3})+(-\frac{8}{3})=-\frac{3}{3}=-1$

بدون محور: مخرج مشترک می گیریم:

$(-\frac{4}{9})+(+\frac{5}{9})=\frac{-4+5}{9}=\frac{1}{9}$ / $(+\frac{5}{7})+(-\frac{2}{3})=\frac{+15-14}{21}=\frac{1}{21}$ / $(-\frac{3}{10})\overset{+}{-}(-\frac{4}{15})=\frac{-9+8}{30}=\frac{-1}{30}$

۳۰=[۱۵ و ۱۰] ک.م.م

ضرب اعداد گویا: اول علامت را مشخص می کنیم و سپس کسر ها را در هم ضرب می کنیم.

تقسیم اعداد گویا: عدد اول را در معکوس کسر دوم ضرب می کنیم.

مثال :

$$\frac{-۲۷}{۳۵} \div \frac{۳}{۲۸} = \frac{-۲۷}{۳۵} \times \frac{۲۸}{۳} = -\frac{۹\times۴}{۵} = -\frac{۳۶}{۵}$$

*روش دور در دور ونزدیک در نزدیک:

$$\frac{-\frac{۴}{۵}}{+\frac{۲}{۳}} = -\frac{۴\times۳}{۵\times۲} = -\frac{۱۲}{۱۰} = -\frac{۶}{۵}$$

حاصل عبارت های زیر را بدست آورید:

$$\frac{(۱+\frac{۱}{۲})(۳-\frac{۱}{۳})}{-(-\left(-۲\frac{-۲}{-۵}\right))} = \frac{\frac{۲+۱}{۲}\times\frac{۹-۱}{۳}}{-\frac{۱۲}{۵}} = -\frac{\frac{۳}{۲}\times\frac{۸}{۳}}{\frac{۱۲}{۵}} = -\frac{۸}{۲}\times\frac{۵}{۱۲} = -\frac{۵}{۳}$$

$$-\frac{۱۱}{۵} + \frac{۲-\frac{۳}{۴}}{۲+\frac{-۳}{۴}} = -\frac{۱۱}{۵} + \frac{۲-\frac{۳}{۴}}{۲-\frac{۳}{۴}} = -\frac{۱۱}{۵} + ۱ = \frac{-۱۱+۵}{۵} = -\frac{۶}{۵}$$

کدام اعداد روبرو گویا است؟ **۱–** (گویا) ، ¼ (گویا) ، $\sqrt{۱۰}$ (گویا نیست) ، صفر (گویا)، $\frac{\sqrt{۵۰}}{\sqrt{۲}}$(این کسر پس از ساده سازی برابر $۵ = \sqrt{۲۵} = \sqrt{\frac{۵۰}{۲}}$ پس گویا است)

تمرینها:

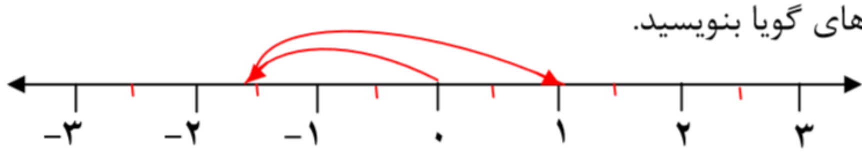
جاهای خالی را با کسر مناسب کامل کنید.

$$-۳\frac{۲}{۵}\times\ldots\ldots = ۱ \quad , \quad -\frac{۵}{۶}\times\ldots\ldots = ۱$$

جدول زیر را کامل کنید.

عدد	-۳	$\frac{۲}{۵}$			$-۴\frac{۳}{۵}$
قرینه			$-\frac{۷}{۵}$		
معکوس				$-\frac{۸}{۹}$	

برای محورهای زیر یک جمع با عددهای گویا بنویسید.



(   ) + (   ) =

فصل دوم- حساب عدد های طبیعی

اعداد اول : هر عدد بزرگتر از یک که فقط دو شمارنده دارد. یعنی بر فقط بر یک و خودش بخش پذیر است

مثال : ۲-۳-۵-۷-۱۱-۱۳-۱۷-۱۹-۲۳-۲۹-۳۱-....

اعداد مرکب: اعدادی که بتوان به صورت دست کم ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت یا بیش از دو شمارنده دارند. مثل : ۶۵

نکته مهم: عدد یک نه اول است و نه مرکب.

نکته مهم : اعداد طبیعی را می توان به صورت حاصلضرب شمارنده های اول آن تجزیه نمود.(به دو روش درختی و میله ای)

مثال : عدد ۹۸ را برحسب اعداد اول آن تجزیه کنید. $۹۸ = ۲ \times ۴۹ = ۲ \times ۷^۲$

نکته : تنها عدد زوج اول عدد ۲ می باشد.

نکته : اگر مجموع دو عدد اول، فرد باشد یکی از آنها عدد ۲ است. مثال : $۷۳ = ۷۱ + ۲; \quad ۹۹ = ۹۷ + ۲$

بزرگترین مقسوم علیه (شمارنده) مشترک دو یا چند عدد(ب. م. م): آن اعداد را تجزیه کرده و سپس شمارنده های اول مشترک با کمترین توان را در هم ضرب می کنیم.

کوچکترین مضرب مشترک دو یا چند عدد(ک. م. م): آن اعداد را تجزیه کرده و سپس شمارنده های اول مشترک و غیر مشترک با بیشترین توان را در هم ضرب می کنیم.

مثال: $[۳۶,۴۸] = ۲^۴ \times ۳^۲ = ۱۴۴$ $\begin{cases} ۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲ \\ ۴۸ = ۲^۴ \times ۳ \end{cases} \rightarrow (۳۶,۴۸) = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲;$

نکته مهم: برای پیداکردن ک.م.م دو عددکافی است که حاصلضرب آن دو عدد را بر ب–م– م تقسیم کنیم.

نکته : ب.م.م دو عدد **همیشه شمارنده** ک.م.م آن دو عدد است.

روش تعیین تعداد شمارنده های یک عدد طبیعی :

آن را تجزیه می کنیم و به توان های عدد های اول یک واحد اضافه کرده و در هم ضرب می کنیم.

مثال: عدد ۲۴ چند شمارنده طبیعی دارد. چند تا مرکب و چند تا اول می باشد؟

$$۲۴ = ۲^۳ \times ۳ \rightarrow (۳ + ۱)(۱ + ۱) = ۸$$

پس ۸ تا شمارنده دارد. که دو تای آن اول است یعنی ۲ و ۳ و بنابراین به جز یک ، ۵ تا مرکب می باشند.

اعداد متباین (نسبت به هم اول): دو عدد که نسبت به هم اولند یعنی ب-م-م آنها یک است. $(a,b) = ۱ \rightarrow (۱۸,۵) = ۱$

✓ دو عدد اول نسبت به هم **اولند**. $(۳,۵) = ۱$

✓ دو عدد متوالی نسبت به هم **اولند.** $(۳,۴) = ۱$

✓ اگر دو عدد به هم بخش پذیر باشند، عدد کوچکتر **ب-م-م** و عدد بزرگتر **ک-م-م** می باشد. $(۱۲۰,۱۰) = ۱۰$, $[۱۲,۲] = ۱۲$

✓

✓ اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک .م.م آنها برابر **حاصلضرب آنها** می شود. $[۱۸,۳] = ۱۸ \times ۳ = ۵۴$

قواعد بخش پذیر ی اعداد طبیعی بر اعداد اول ۲-۳-۵-۱۱

عددی بر ۲ بخش پذیر است که زوج باشد. **عددی بر ۳** بخش پذیر است که مجموع اعداد آن بر ۳ بخش پذیر باشد. **عددی بر ۵** بخش پذیر است که عدد یکان آن صفر یا ۵ باشد. **عددی بر ۱۱** بخش پذیر است که رقم های عدد را از سمت راست مثبت و منفی می کنیم و مجموع آن را حساب می کنیم. در صورتی که مجموع صفر یا مضربی از ۱۱ باشد، آن عدد بر ۱۱ بخش پذیر است.

پیدا کردن تمام اعداد اول طبیعی با روش غربال:

اعداد ۱ تا آن عدد را می نویسم و عدد یک را خط می زنیم و مضارب مرکب عدد اول خط نخورده بعدی را خط می زنیم و این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که مربع عدد اول خط نخورده بعدی در بین اعداد باشد. عدد های خط نخورده باقی مانده ، اعداد اول می باشند.

تشخیص اول یا مرکب بودن عدد طبیعی به روش تقسیم کردن:

عدد طبیعی را بر اعداد اول کمتر از جذر عدد طبیعی تقسیم می کنیم. اگر عدد طبیعی بر یکی از این اعداد اول بخش پذیر باشد مرکب و در غیر این صورت اول است.

آیا عدد ۹۷ اول است ؟ $\sqrt{۹۷} \cong ۹$

۹۷ را بر ۲ و ۳ و ۵ و ۷ تقسیم می کنیم.

۹۷ ÷ ۷	۹۷ ÷ ۵	۹۷ ÷ ۳	۹۷ ÷ ۲
۹۷	۹۷	۹۷	۹۷
۷	۵	۹	۸-
۲۷	۴۷	۰۷	۱۷
۲۱	۴۵	۶	۱۶
۶	۲	۱	۱
خارج قسمت: ۱۳	خارج قسمت: ۱۹	خارج قسمت: ۳۲	خارج قسمت: ۴۸

عدد ۹۷ بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ بخش پذیر نیست پس ۹۷ عددی اول است.

مثال :عدد ۱۶۷ اول است یا مرکب؟ چرا؟ بر اعداد اول کوچکتر از $۱۲ \cong \sqrt{۱۶۷}$ مثل ۲-۳-۵-۷-۱۱ تقسیم می کنیم. طبق قواعد بخش پذیر بر ۲-۳-۵ بخش پذیر نیست با تقسیم کردن بر عدد های ۷ و ۱۱ متوجه می شویم که بر بر آنها نیز بخش پذیر نیست و پس ۱۶۷ اول است.

نکته: کوچکترین عدد مرکب یک رقمی عدد ....**۴**........ و بزرگترین عدد اول دو رقمی عدد ....**۹۷**........ می باشد.

مثال: عددی را بنویسید که دارای سه شمارنده اول۳ ، ۵ و ۲ باشد. **جواب :** همه را در هم ضرب می کنیم: $۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$

کدام یک از اعداد زیر اولند؟ $۲۷,\quad ۵۳,\quad ۴۱,\quad \sqrt{۴۹},\quad ۵^{\circ},\quad ۱۱۷$

توضیح : اعدادی که بتوان به صورت دست کم ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت مرکب است: $\sqrt{۴۹}$ ، ۴۱، ۵۳ اولند.

$$۲۷ = ۳ \times ۹,\quad ۵۳,\quad ۴۱,\quad \sqrt{۴۹} = ۷,\quad ۵^{\circ} = ۱,\quad ۱۱۷ = ۳ \times ۳۹$$

تمرین ها:

۱- در غربال عددهای ۱ تا ۷۰ به سئوالات زیر پاسخ دهید :

الف) اولین عددی که خط می خورد کدام است؟

ب) آخرین عددی که خط می خورد کدام است؟

پ) آخرین مضرب ۵ که خط می خورد کدام است؟

۲ - عدد ۱۴۳ اول است یا مرکب؟ چرا؟

۳ - سن مادربزرگ سعید بزرگ ترین عدد اول دو رقمی و سن سعید کوچک ترین عدد اول دو رقمی است. سعید چند سال از مادربزرگش کوچک تر است؟

- به روش الگوریتم غربال اعداد اول بین ۱۰۰ و ۱۲۰ را پیدا کنید.

- با ذکر دلیل اول یا مرکب بودن اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{۸۱}$ ب) ۱۲۷ پ) ۱۱×۱۳ ت) $۳^{۷}$

کدام گزینه نادرست است؟

۱) (۷ و ۱۲) = ۱ ۲) (۸ و ۱۵) = ۱ ۳) (۱۳ و ۵) = ۱ ۴) (۳۵ و ۷) = ۱

فصل سوم (چند ضلعی ها)

چند ضلعی : هر خط شکسته بسته ، چند ضلعی می گویند به طوری که محل برخورد آنها راس های چند ضلعی می باشند.

چند ضلعی منتظم: چند ضلعی که ضلع ها و زاویه های آن با هم مساوی می باشند.

- ✓ کوچکترین چند ضلعی منتظم : سه ضلعی منتظم یا مثلث متساوی الاضلاع
- ✓ چهار ضلعی منتظم ....مربع............. می باشد.

مرکز تقارن : نقطه ای که با دوران ۱۸۰ درجه شکل حول آن بر خودش منطبق شود:

خط تقارن: خطی است که شکل را به دو نیمه مساوی تقسیم می کند.

- ✓ مرکز دایره مرکز تقارن آن می باشد.
- ✓ هر n ضلعی منتظم، n محور تقارن دارد و اگر n زوج باشد، مرکز تقارن نیز دارد و اگر n فرد باشد، مرکز تقارن ندارد.
- ✓ تعداد قطری های یک n ضلعی منتظم برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ می باشد.

مثال : یک ۷ ضلعی منتظم چند محور تقارن و چند مرکز تقارن و چند قطر دارد؟

۷ تا محور تقارن- بدون مرکز تقارن و $۱۴ = \frac{۷\times۴}{۲}$ قطر دارد.

توازی و تعامد

دو خط موازی : دو خطی که هیچ گاه همدیگر را قطع نمی کنند. $d_۱ \parallel d_۲$

دو خط نا موازی یا متقاطع : دو خطی که همدیگر را قطع می کنند: $d_۱ \nparallel d_۲$

دو خط عمود بر هم: $d_۱ \perp d_۲$

نکته خیلی مهم: **دو خطی که یکدیگر را قطع می کنند، زاویه های روبرو به هم مساوی بوده و به آنها زاویه های متقابل به راس می گویند و زاویه های مجاور مکمل می باشند.**

چند اصل مهم توازی و تعامد:

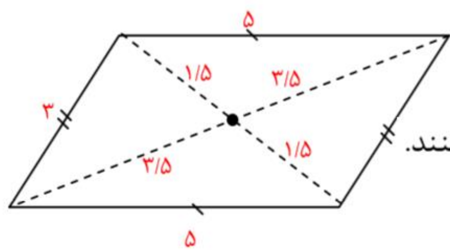
- ✓ **دو خط عمود بر یک خط ، با هم موازی اند.** $\begin{cases}\boldsymbol{d_1 \perp L}\\ \boldsymbol{d_2 \perp L}\end{cases} \rightarrow d_۱ \parallel d_۲$
- ✓ **دو خط موازی با یک خط ، خود با هم موازی اند.** $\begin{cases}\boldsymbol{d_1 \parallel L}\\ \boldsymbol{d_2 \parallel L}\end{cases} \rightarrow d_۱ \parallel d_۲$

- **اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.** $\begin{cases} d_1 \parallel d_2 \\ L \perp d_1 \end{cases} \rightarrow L \perp d_۲$
- **از یک نقطه خارج یک خط، تنها یک خط به موازات آن می توان رسم کرد.**
- **فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول کوتاه ترین پاره خطی که آن نقطه را به خط وصل می کند که همان طول پاره خطی است که از آن نقطه گذشته و بر خط عمود است.**

نکته : در هر مثلث متساوی الساقین، ارتفاع، میانه وارد بر قاعده و نیمساز راس و عمود منصف قاعده بر هم منطبق می باشد.

متوازی الاضلاع : چهار ضلعی است که ضلع های روبه روی آن دو به دو با هم موازی است.

خاصیت های متوازی الاضلاع :



۱) ضلع های روبرو باهم موازی و مساوی اند. ۳) قطرها همدیگر را نصف می کنند.

۲) زاویه های روبرو باهم مساوی اند. ۴) زاویه های مجاور مکمل اند.

- متوازی الاضلاع محور تقارن ندارد ولی محل برخورد قطرهای آن ، مرکز تقارنش می باشد.
- **مستطیل :** متوازی الاضلاعی که زاویه های آن قائمه می باشند.
- **لوزی:** متوازی الاضلاعی که ضلع های آن مساوی می باشد.
- **مربع:** متوازی الاضلاعی که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه قائمه دارد.
- **هر مربعی ، لوزی یا مستطیل یا متوازی الاضلاع می باشد ولی عکس آن درست نیست.**
- **هر لوزی یا مستطیلی، متوازی الاضلا ع است ولی عکس آن درست نیست.**

چند نکته:

۱) اگر وسط ضلع های هر متوازی الاضلاع را به طور متوالی به هم وصل کنیم، متوازی الاضلاع تشکیل می شود.

۲) اگر وسط ضلع های هر مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، لوزی تشکیل می شود.

۳) اگر وسط ضلع های هر لوزی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، مستطیل تشکیل می شود.

۴) اگر وسط ضلع های هر مربع را به طور متوالی به هم وصل کنیم، مربع تشکیل می شود.

ذوزنقه: چهار ضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد.

- ✓ ذوزنقه ای که دو ضلع غیر موازی آن مساوی باشد، **ذوزنقه متساوی الساقین** می گویند.

کایت یا شبه لوزی: هر چهار ضلعی که دو جفت اضلاع مجاور مساوی با دو اندازه مختلف دارد در این صورت قطرهای کایت همدیگر نصف می کنند.

زاویه های داخلی چند ضلعی: زاویه های که داخل چند ضلعی قرار دارند.

- ✓ **چند ضلعی محدب و مقعر :** در چند ضلعی محدب(کوژ)، زاویه های داخلی کم تر از ۱۸۰ درجه می باشند ولی در چند ضلعی های مقعر(کاو) ، دست کم یک زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه وجود دارد.
- ✓ هر n ضلعی منتظم را می توان به (n-۲) مثلث تقسیم کرد.
- ✓ مجموع زاویه های داخلی یک n ضلعی منتظم: $(n-۲)\times ۱۸۰$
- ✓ اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم: $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$
- ✓ شرط پوشاندن یک سطح توسط کاشی های مختلف این است که در هر راس ، مجموع زاویه های داخلی ۳۶۰ درجه شود.
- ✓ برای پوشاندن یک سطح توسط یک نوع کاشی منتظم ، اندازه زاویه داخلی آن بایستی شمارنده ۳۶۰ باشد.

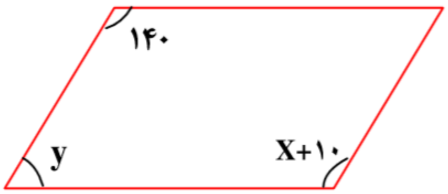
زاویه خارجی : زاویه ای که در هر راس چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر ایجاد می شود، زاویه خارجی آن راس می گویند.

- ✓ در هر مثلث ، هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش برابر است.
- ✓ مجموع زاویه های خارجی هر n ضلعی محدب برابر ۳۶۰ درجه است.
- ✓ اندازه هر زاویه خارجی: $\frac{۳۶۰}{n}$
- ✓ مجموع زاویه های داخلی و خارجی در هر n ضلعی محدب برابر $n\times ۱۸۰$ درجه می باشد.

مثال: زاویه داخلی و خارجی یک ۸ ضلعی منتظم را بدست آورید:

زاویه خارجی: $\frac{۳۶۰^\circ}{n}=\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۴۵^\circ$ زاویه داخلی: $۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$

◀ مثال : شکل زیر متوازی الاضلاع است مقدار y,x را به دست آورید.



پاسخ : $x + ۱۰ = ۱۴۰ \Rightarrow x = ۱۴۰ - ۱۰ = ۱۳۰$

$y + ۱۴۰ = ۱۸۰ \Rightarrow y = ۱۸۰ - ۱۴۰ = ۴۰$

❋ اندازه ی یک زاویه داخلی چندضلعی منتظم :

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$$

◀ مثال :اندازه ی یک زاویه داخلی ۸ ضلعی منتظم چند درجه است؟

$$n = ۸ \Rightarrow \frac{(۸-۲)\times ۱۸۰}{۸} = \frac{۶\times ۱۸۰}{۸} = \frac{۱۰۸۰}{۸} = ۱۳۵^\circ$$

تمرین ها:

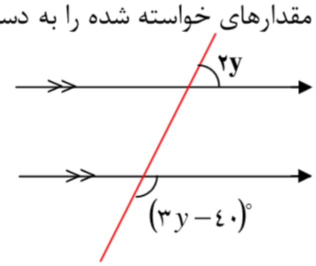
جدول زیر را کامل کنید.

نام شکل	مربع	مستطیل	لوزی	دایره	متوازی الاضلاع	مثلث متساوی‌الاضلاع	ذوزنقه متساوی‌الساقین
تعداد محور تقارن	۴						
مرکز تقارن	دارد						

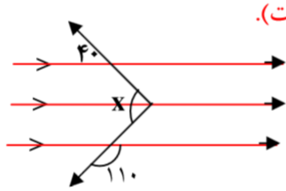
کدام چهارضلعی زیر مرکز تقارن دارد ولی محور تقارن ندارد؟

۱) مربع　　۲) مستطیل　　۳) لوزی　　۴) متوازی الاضلاع

در شکل های زیر مقدارهای خواسته شده را به دست آورید (عملیات لازم است).



y=.........



x =................درجه

فصل چهارم(جبر و معادله):

نوشتن عبارت های کلامی به عبارت های جبری و برعکس:

- ✓ هر عدد به توان یک ، برابر خودش می باشد. $a^{۱} = a$
- ✓ یک به توان هر عدد ، برابر یک می شود $۱^{a} = ۱$
- ✓ در ضرب دو عبارت توان دار با پایه های مساوی ، یک پایه را نوشته و توان های را با هم جمع می کنیم. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- ✓ صفر به توان هر عدد مثبت ، برابر صفر است. $۰^{a} = ۰ \ (a > ۰)$
- ✓ مربع یا مجذرو عد a: $a^{۲}$

نوشتن عبارت های جبری به عبارت های کلامی به :

$a^{۰} = ۱(a \neq ۰)$: هر عدد به توان صفر به جز خود صفر برابر صفر می شود.

$a^n \times b^n = (ab)^n$: در ضرب دو عدد تواندار با توان های یکسان، یک توان را نوشته و پایه های را در هم ضرب می کنیم.

ضرب یک جمله ای در چند جمله ای(توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع): $a(b+c) = ab + ac$

جملات متشابه: در یک عبارت جبری ، جملاتی که قسمت حرفی و همچنین توان های آنها یکسان باشد، جملات متشابه می گویند.

مثال : $۵x^{۲}y; \quad \frac{۵}{۲}x^{۲}y; \quad -x^{۲}y$

جمع جبری جملات متشابه: دریک عبارت جبری برای ساده نمودن عبارت جبری ، جملات متشابه را با هم جمع و تفریق می کنیم.

ضرب یک جمله در یک جمله: در این حالت قواعد ضرب اعداد توان دار با پایه های یکسان را به کار می بریم:

مثال : $(۲a^{۲}b)(-ab^{۳}) = -۲a^{۳}b^{۴}$

ضرب چند جمله در چند جمله: در این حالت تمام جملات را تک تک در هم ضرب می کنیم.

$$(۴-x)(x+۳) = ۴x + ۱۲ - x^{۲} - ۳x = -x^{۲} + x + ۱۲$$

گسترده نویسی یک عدد دو رقمی یا سه رقمی : $\overline{ab} = ۱۰a + b; \quad \overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c$

مقلوب یک عدد: ارقام یک عدد را با وارونه نویسی ارقام یک عدد مقلوب آن بدست می آید. $\overline{ab} = \overline{ba}; \quad \overline{abc} = \overline{cba}$

نشان دهید: تفاضل هر عدد دو رقم از مقلوبش ، مضرب ۹ می باشد:

$$\overline{ab} - \overline{ba} = ۱۰a + b - (۱۰b + a) = ۹(a-b)$$

نوشتن عبارت جبری برای مساحت و محیط تعدادی شکل های هندسی:

مساحت مثلث: نصف قاعده(a) در ارتفاع(h): $S = \frac{a \times h}{۲}$

محیط مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a: $P = ۳a$

مساحت مربع به ضلع a: $S = a^{۲}$

محیط مربع به ضلع a : $P = ۴a$

مساحت مستطیل به طول a و عرض b : $S = ab$

محیط مستطیل به طول a و عرض b : $P = ۲(a + b)$

مساحت متوازی الاضلاع به ضلع قاعده a و ارتفاع h : $S = a \times h$

مساحت ذوزنقه: نصف مجموع دو قاعده a و b در ارتفاع h : $S = \frac{(a+b)h}{۲}$

پیدا کردن مقدار عددی برای یک عبارت جبری :

با قرار دادن عدد به جای حروف ، مقدار عددی برای عبارت جبری بدست می آید.

$$x = ۲, \qquad y = ۴x - ۲ \rightarrow y = ۴(۲) - ۲ = ۸ - ۲ = ۶$$

$$y = ۲, \qquad y = ۴x - ۲ \rightarrow ۲ = ۴x - ۲ \rightarrow ۲ + ۲ = ۴x \rightarrow ۴ = ۴x \rightarrow x = ۱$$

با کمک عبارت های جبری نشان دهید که :

- ✓ الف: ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.
- ✓ ب: ضرب دو عدد زوج، عددی زوج است.
- ✓ ج: ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است.

تجزیه کردن عبارت های جبری:

تجزیه(تبدیل نمودن به ضرب) برعکس خاصیت توزیع پذیری را تجزیه می گویند. $ab + ac = a(b + c)$

نکته مهم: در عمل تجزیه ، عامل های مشترک را بیرون پرانتز می نویسیم. برای پیدا کردن عامل های مشترک حرفی، پایه های یکسان با کمترین توان را انتخاب می کنیم. عامل مشترک عددی هم ب .م.م اعداد می باشد.

مثال : تجزیه کنید: $-۸x^{۲}y + ۲xy = ۲xy(-۴x + ۱)$

ساده کردن کسرهای شامل عبارت های جبری:

ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه کرده و عامل های متشرک صورت و مخرج را ساده می کنیم.

مثال : ساده کردن کسر

$$\frac{۲a^{۳}b-۶a^{۲}}{a^{۲}b-۳a}=\frac{۲a^{۲}(ab-۳)}{a(ab-۳)}=۲a$$

توان یک عبارت جبری : به مقدار توان ، عبارت جبری را در خودش ضرب می کنیم.

$$(a+b)^{۲}=(a+b)(a+b)$$

نکته : ضرب ، خاصیت جابجائی دارد. ab=ba

قرینه یک عبارت جبری: تمام جملات آن را قرینه می کنیم:

$$-(a-b)=-a+b$$

فاکتور گیری علامت منفی : دراین حالت ، علامت منفی را بیرون پرانتز نوشته و جملات عبارت جبری را قرینه می کنیم:

$$-a+b=-(a-b)$$

معادله :

یک تساوی جبری را معادله می گویند.

جواب معادله:

مقدار یا مقدار های که معادله را به یک تساوی عددی تبدیل می کند.

روش حل معادله:

- ✓ دو طرف تساوی را تا حد امکان ساده می کنیم.
- ✓ جملات مجهول را یک طرف و جملات معلوم را به طرف دیگر منتقل می کنیم.
- ✓ جواب از تقسیم طرف معلوم به ضریب مجهول بدست می آید.
- ✓ **نکته:** هر عبارت که از طرف تساوی به طرف دیگر برود، قرینه می شود.

مثال : معادله روبرو را حل کنید.

$$-۲x+۴=-۲x+۱۶-۳x$$

$$-۲x+۴=-۵x+۱۶$$

$$-۲x+۵x=۱۶-۴$$

$$۳x=۱۲\rightarrow x=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

حل معادلات با ضرایب گویا:

روش اول : جملات مجهول را یک طرف تساوی و جملات معلوم را در طرف دیگر تساوی می بریم و به طور جداگانه مخرج مشترک می گیریم و طرف معلوم را به ضریب مجهول تقسیم می نماییم.

مثال :

$$\frac{۲}{۳}x - ۲ = \frac{۱}{۳} - x$$

$$\frac{۲}{۳}x + x = ۲ + \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۲x + ۳x}{۳} = \frac{۶ + ۱}{۳} \to \frac{۵x}{۳} = \frac{۷}{۳} \to x = \frac{۷}{۵}$$

روش دوم: دو طرف تساوی را در ک.م. م مخرج ها ضرب کرده و سپس معادله را حل می کنیم.

معادله روبرو را حل کنید:

$$\frac{x-۲}{۲} + \frac{x}{۳} = \frac{۴}{۶}$$

$$۶ \times \left(\frac{x - ۲}{۲} + \frac{x}{۳}\right) = ۶ \times \frac{۴}{۶}$$

$$۳(x - ۲) + ۲x = ۴$$

$$۳x - ۶ + ۲x = ۴$$

$$۵x - ۶ = ۴ \to ۵x = ۴ + ۶ = ۷ \to x = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

مثال:

$۳۰=$ [۲ و ۳ و ۵]

$$۳۰\left(\frac{۲}{۵}x - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲}\right)$$

$$\cancel{۳۰}^{۶} \times \frac{۲}{\cancel{۵}_{۱}}x - \cancel{۳۰}^{۱۰} \times \frac{۲}{\cancel{۳}_{۱}} = \cancel{۳۰}^{۱۵} \times \frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}$$

$$۱۲x - ۲۰ = ۱۵$$

$$۱۲x = ۱۵ + ۲۰ = ۳۵$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{۳۵}{۱۲}$$

$$\frac{۳}{۵}x - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۳}{۵}x = \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۳+۲}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

$$x = \frac{۵}{۴} \div \frac{۳}{۵} = \frac{۵}{۴} \times \frac{۵}{۳} = \frac{۲۵}{۱۲} \Longrightarrow$$

$$x = \frac{۲۵}{۱۲}$$

تمرین ها:

☆ مقدار عددی عبارت جبری زیر را به ازای اعداد داده شده بدست اورید.

$$m=۵ \quad , \quad b=-۳ \Rightarrow \quad ۷b^{۲}-۴m=$$

☆ الف) تساوی مقابل را کامل کنید.

$$۳ab+۶b^{۲}=........(.........+۲b)$$

ب) عبارت جبری زیر را ساده کنید.

$$۸x^{۲}-۴x(۲x+۳)=$$

☆ الف) برای مسئله ی زیر فقط معادله بنویسید. حل آن لازم نیست.

مجموع دو عدد زوج متوالی ۶۲ شده است آن دو عدد کدام اند؟

ب) معادله ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{۳}{۴}x+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۶}x$$

☆ مقدار عددی عبارت های جبری زیر را به ازای اعداد داده شده به دست آورید.

الف) $x=۲,\ y=۳ \Rightarrow ۵x-y+۳=$

ب) $a=۴, b=-۲ \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=$

ج) $x=۲, b=-۳ \Rightarrow ۷b-x^{۳}=$

د) $C=-۱, m=۳ \Rightarrow \dfrac{۲mc-c^{۲}}{m+C+۵}=$

☆ درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) ضریب عددی $a^{۲}b$ عدد ۲ می باشد.

ب) مجذور m به صورت جبری $m^{۲}$ است.

ج) حاصل $(xy)^{۳}$ برابر است با $xy^{۳}$.

د) حاصل ضرب $(۲a)(۲b)$ عددی زوج است.

هـ) دو جمله ی $-۵n^{۲}h$ و $-۵nh^{۲}$ متشابه اند.

فصل پنجم (بردار و مختصات)

بردار: پاره خط جهت را بردار می گویند. مثل بردار AB : $\overrightarrow{AB}$

هر بردار دارای اندازه، جهت و راستا می باشد.

دوبردار مساوی: دو بردارهم اندازه، هم جهت و موازی باهم مساویند.

نکته: دو بردار یکسان دارای مختصات یکسان می باشند.

دو بردار قرینه: دو بردار هم اندازه، موازی ولی خلاف جهت هم، قرینه هم می باشند.

مختصات بردار قرینه، قرینه مختصات بردار اول می باشد.

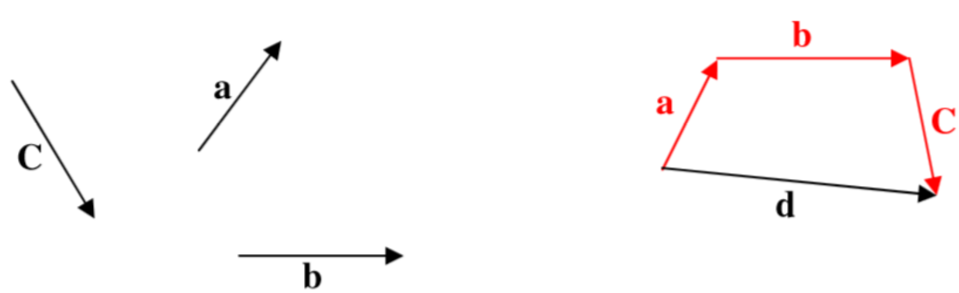
نقطه ابتدای A را می توان با یک بردار انتقال $\overrightarrow{AB}$ به نقطه انتهایی B منتقل نمود وهمیشه داریم:

نقطه انتها= **بردار انتقال** + **نقطه ابتدا**

روش جمع بردارها:

- ### روش مثلثی

ابتدا برداری مساوی بردار اول رسم می کنیم و به دنبال آن برداری مساوی بردار دوم رسم می نمایم و این کار را ادامه می دهیم و در آخر برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می کند، بردار برآیند یا جمع بردارها را می دهد.



- ### روش متوای الاضلاعی

از یک نقطه دو بردار مساوی ، بردارهای مورد نظر رسم می کنیم و با آنها یک متوازی الاضلاع می سازیم. قطری از متوازی الاضلاع که ابتدای آن ، ابتدای دو بردار هست، **بردار برآیند** می باشد.

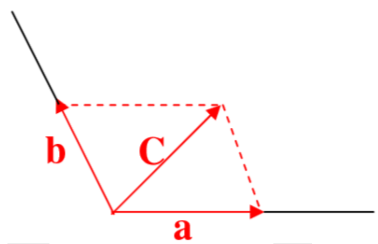
نکته: جمع دو بردار قرینه ، صفر است.

تجزیه بردار:

هر بردار $\vec{C}$ را می توان در دو راستای مختلف با ساختن متوازی الاضلاعی تجزیه نمود. به طوری که بردار $\vec{C}$ قطر آن می باشد.

◀ مثال: بردار $\vec{C}$ را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.

$$\vec{C}=\vec{a}+\vec{b}$$



ضرب یک عدد در بردار:

- ✓ در ضرب یک عدد در بردار ، آن عدد در مختصات بردار ضرب می شود.
- ✓ اگر عددی که ضرب می شود مثبت باشد، بردار بوجود آمده همجهت بردار اولی خواهد بود.
- ✓ اگر عددی که ضرب می شود منفی باشد، بردار بوجود آمده خلاف جهت بردار اولی خواهد بود.
- ✓ بدون در نظر گرفتن علامت عدد، اگر عدد بین صفر و یک باشد، اندازه بردار بوجود آمده کوچکتر از طول بردار اصلی است و اگر عدد بزرگتر از یک باشد، اندازه بردار ، بزرگتر از اندازه بردار اصلی خواهد شد.

◀ مثال «۱» :

$$۵\times\begin{bmatrix}۲\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰\\-۲۰\end{bmatrix}\quad , \quad (-۳)\begin{bmatrix}-۶\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۸\\-۶\end{bmatrix}$$

◀ مثال «۲» : اگر $\vec{t}=\begin{bmatrix}۴\\-۳\end{bmatrix}$ و $\vec{m}=\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix}$ باشد، مختصات $\vec{x}=-۲\vec{t}+۳\vec{m}$ را به دست آورید.

$$\vec{x}=-۲\vec{t}+۳\vec{m}=(-۲)\begin{bmatrix}۴\\-۳\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸\\۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱۵\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۳\\۱۲\end{bmatrix}$$

بردارهای واحد و تجزیه بردار در دو راستای عمود بر هم:

بردار واحد در جهت محور x را $\vec{i}$ می نمایم و داری مختصات $\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$می باشد.

بردار واحد در جهت محور y را $\vec{j}$ می نمایم و داری مختصات $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$می باشد.

حل معادلات برداری:

- ✓ **روش مختصاتی: در این روش ، مختصات تمام بردار ها را می نویسیم و بعد بردار مجهول را بدست می آوریم.**

◀مثال : معادله زیر را حل کنید :

$$۳\vec{x}+\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x}=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\+۳\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}-۹\div۳\\۳\div۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\vec{x}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}$$

- ✓ **روش برداری: در این روش، مختصات تمام بردار ها را برحسب بردارهای یکه نوشته و بعد مجهول را بدست آوریم.**

◀مثال: معادله ی $۳\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۵\\۱\end{bmatrix}$ را حل کنید.

$$۳\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{x}=-۵\vec{i}+\vec{j}$$

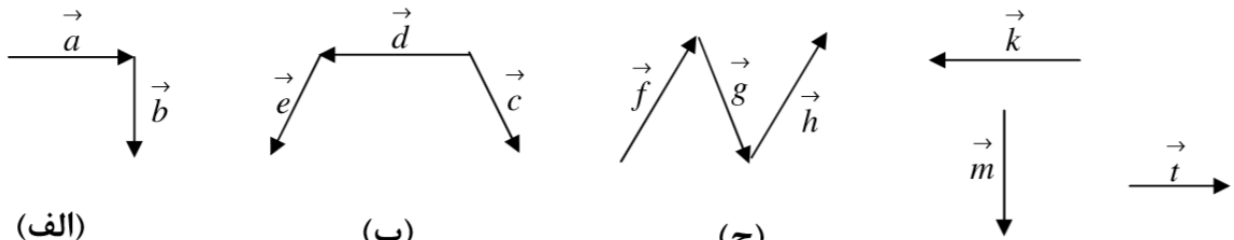
$$۲\vec{X}=-۵\vec{i}+\vec{j}-۳\vec{i}-\vec{j}$$

$$۲\vec{x}=-۸\vec{i}$$

$$\vec{x}=-۴\vec{i}$$

تمرین ها :

حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید و برای هر کدام یک جمع برداری بنویسید.



(الف) **(ب)** **(ج)** **(د)**

اگر $\vec{n}=-۳\vec{i}\,,\vec{m}=-۲\vec{i}-\vec{j}$ باشد، ابتدا مختصات $\vec{n},\vec{m}$ را نوشته و سپس مختصات Z را بیابید.

$\vec{m}=\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$, $\vec{n}=\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

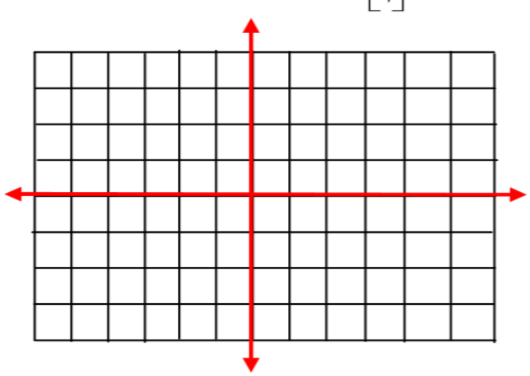
$\vec{z}=-\vec{m}+۴\vec{n}=$

معادلات برداری زیر را حل کنید.

الف) $\vec{x}+۳\vec{i}+\vec{j}=\begin{bmatrix}-۷\\ ۵\end{bmatrix}$

ب) $۷x+\begin{bmatrix}۹\\ ۹\end{bmatrix}=۲\vec{x}-\vec{i}-\vec{j}$

الف) بردارهای $\vec{a}=۳\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=-۲\vec{i}+۴\vec{j}$ ابتدا از نقطه ی $C=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}$ رسم کنید.



ب) $\vec{a}+\vec{b}$ را رسم کنید و آن را Z بنامید.

ج) مختصات بردار Z را بنویسید.

معادلات زیر را حل کنید.

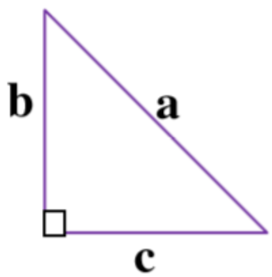
ب) $\begin{bmatrix}۲\\ ۹\end{bmatrix}+\vec{b}=\begin{bmatrix}۷\\ -۱\end{bmatrix}$

الف) $۷\vec{x}=\begin{bmatrix}-۱۴\\ ۳۵\end{bmatrix}$

فصل ششم : مثلث

رابطه فیثاغورس:

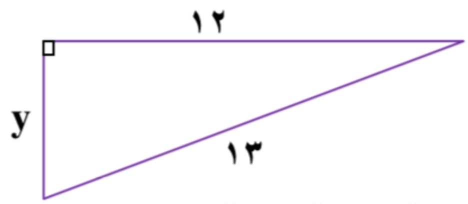
در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر برابر مجموع مجذور های دو ضلع قائمه می باشد.



$$\boxed{a^{۲} = b^{۲} + C^{۲}}$$

◀مثال :

در شکل های زیر مقادیر y,x را به دست آورید.

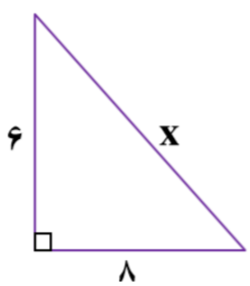


$$۱۳^{۲} = y^{۲} + ۱۲^{۲}$$

$$۱۶۹ = y^{۲} + ۱۴۴$$

$$y^{۲} = ۱۶۹ - ۱۴۴ = ۲۵$$

$$y = \sqrt{۲۵} = ۵ \Rightarrow \boxed{y=۵}$$



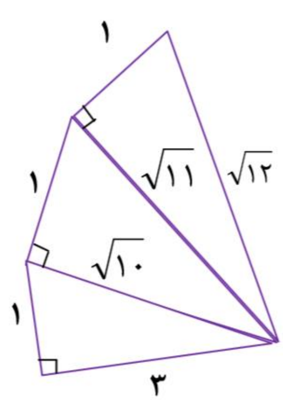
$$x^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲}$$

$$x^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$$

$$x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \Rightarrow \boxed{x=۱۰}$$

◀مثال :

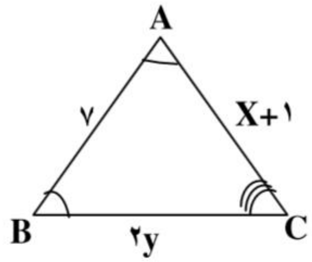
پاره خطی به طول $\sqrt{۱۲}$ سانتی متر رسم کنید.

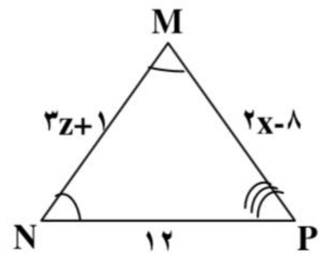


شکل های هم نهشت:

در صورتی که یک شکل با چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) بر شکل دیگر منطبق شود، این دو شکل با یکدیگر هم نهشت هستند و اجزای متناظر آنها با هم یکسان می باشند.

◀مثال : دو مثلث MNP,ABC هم نهشت اند (انتقال). اندازه ی مجهول را به دست آورید.





$\overline{AB}=\overline{MN}$

$۷=۳z+۱$

$۷-۱=۳z$

$۶=۳z$

$z=\frac{۶}{۳}=۲$

$\overline{AC}=\overline{MP}$

$x+۱=۲x-۸$

$۱+۸=۲x-x$

$\boxed{x=۹}$

$\overline{BC}=\overline{NP}$

$۲y=۱۲$

$y=\frac{۱۲}{۱۲}=۶$

$\boxed{y=۶}$

❋ حالت های هم نهشتی در مثلث ها :

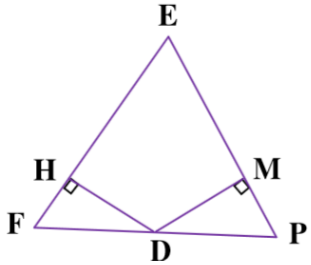
برای همه ی مثلث ها

۱. سه ضلع (ض ض ض)
۲. دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)
۳. دو زاویه و ضلع بین (زض ز)

مخصوص مثلث قائم الزاویه

۴. وتر و یک ضلع (و ض)
۵. وتر و یک زاویه تند (و ز)

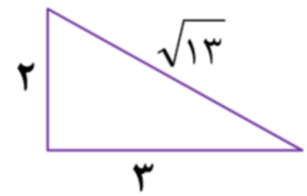
مثال : مثلث EFP متساوی الاضلاع و نقطه D وسط FP است چرا دو مثلث FHD و DPM هم نهشت اند؟

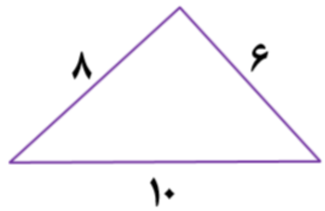


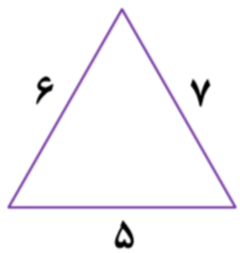
$$\left.\begin{array}{l} \overline{FD}=\overline{DP} \ \text{(D وسط FP)} \\ \hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ \ \text{(مثلث متساوی الاضلاع)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \overset{\Delta}{FHD}\cong \overset{\Delta}{DMP}$$

تمرین ها :

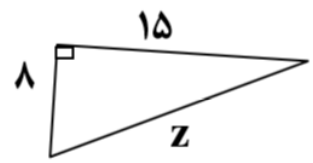
☆ کدام مثلث قائم الزاویه نیست؟ چرا؟

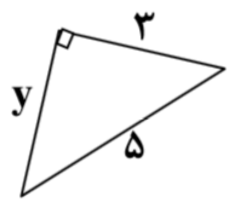


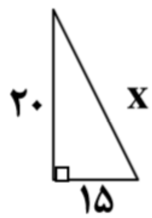




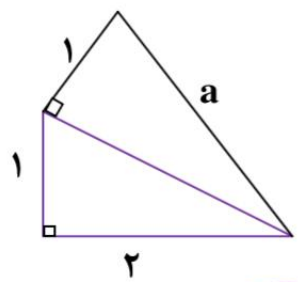
☆ در شکل های زیر مقدار مجهول را به دست آورید.





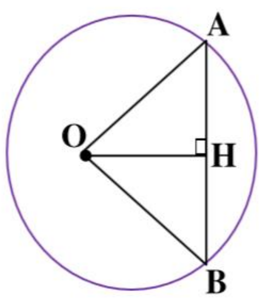


☆ محیط شکل زیر را حساب کنید. (ابتدا مقدار a را به دست آورید).



☆ در شکل مقابل OH عمود منصف وتر AB می باشد :

الف) چرا $\overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OHB}$ ؟



درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) اگر نقطه ای روی عمود منصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

ب) اگر ضلع های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً هم نهشت هستند.

ج) یکی از حالت های هم نهشتی دو مثلث (ززز) است.

د) دو مثلث متساوی الساقین همواره هم نهشت اند.

هـ) اعداد ۳ و ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند.

و) قطر مربعی به ضلع ۴ سانتی متر برابر است با $\sqrt{۳۲}$.

فصل ۷: توان

- ✓ **در ضرب دو عبارت توان دار با پایه های مساوی** ، یک پایه را نوشته و توان های را با هم جمع می کنیم.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

- ✓ **در ضرب دو عدد تواندار با توان های یکسان،** یک توان را نوشته و پایه های را در هم ضرب می کنیم:

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

- ✓ **هر گاه عدد توان داری را به توان می رسانیم،** یک پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می کنیم:

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

- ✓ **در تقسیم دو عبارت توان دار با پایه های مساوی** ، یک پایه را نوشته و توان های را از هم کم می کنیم.

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

- ✓ **در تقسیم دو عدد تواندار با توان های یکسان،** یک توان را نوشته و پایه های به هم تقسیم می کنیم:

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n$$

مثال: حاصل عبارت های توانی زیر را بدست آورید:

$$\left(-۲۲۵^{۲} \times \frac{۱}{۳^{۲} \times ۵^{۲}}\right)^{۳} \div \left(\frac{۸۱^{۴}}{۹} \times \frac{۲۵}{۳^{۲} \times ۵^{۲}}\right)^{۰} = ۱۵^{۶}$$

◀**مثال:**

$$۲۷ \times ۹^{۴} = ۳^{۳} \times (۳^{۲})^{۴} = ۳^{۳} \times ۳^{۸} = ۳^{۱۱}$$

معادله های توان دار:

۱- **پایه ها برابر ولی توان ها متفاوت:** توان ها را مساوی قرار می دهیم و جواب معادله را بدست می آوریم.

مثال: $۲^{۲x+۱} = ۲^{۲} \rightarrow ۲x + ۱ = ۲ \rightarrow ۲x = ۲ - ۱ = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۲}$

۲- **پایه ها متفاوت ولی توان ها برابر:** پایه ها را مساوی قرار داده و جواب معادله را بدست می آوریم.

مثال: $(۲x)^{۴} = ۲^{۴} \rightarrow ۲x = ۲ \rightarrow x = ۱$

۳- **پایه ها متفاوت و توان ها متفاوت:** در این معادلات ، یا پایه ها یا توان ها را با هم یکی می کنیم و طبق یکی از دو روش بالا ، معادله را حل می کنیم.

مثال: $۲^{۲x+۱} = ۱ \to: ۲^{۲x+۱} = ۲^{۰} \to ۲x + ۱ = ۰ \to ۲x = -۱ \to x = \frac{-۱}{۲}$

مقایسه اعداد توان دار:

۱- **اگر توان ها یکسان باشند و پایه ها مثبت باشد،** پایه ای که بزرگتر است ، عددش بزرگتر است.

مثال: $۴^{۳} > ۲^{۳}$

۲- **اگر پایه ها مساوی و بزرگتر از یک باشد،** عددی که توانش بزرگتر است، بزرگتر می باشد.

مثال: $۴^{۹} > ۴^{۵}$

۳- **اگر پایه ها مساوی و مثبت و کوچکتر از یک باشد،** عددی که توانش کوچکتر باشد، بزرگتر می باشد.

مثال: $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} > \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}$

جذر هر عدد مقداری مثبت است. ولی ریشه های یک عدد همواره دو مقدار قرینه ی هم هستند.

سئوال ۱) جذر عددهای زیر را بنویسید.

$\sqrt{۰/۴۹} = ۰/۷$, $\sqrt{\frac{۱}{۲۵}} = \frac{۱}{۵}$, $\sqrt{۳۶} = ۶$

سئوال ۲) ریشه های عدد ۳۶ را مشخص کنید. ۶ و ۶-

نکته :اعداد منفی جذر ندارند.

جذر تقریبی:

۱- ابتدا دو عدد مربع کامل متوالی را پیدا می کنیم که عدد زیر رادیکال بین آن دو باشد بنابراین جذر آن بین دو عدد طبیعی متوالی قرار می گیرد .

۲- وسط دو عدد طبیعی متوالی را بدست می آوریم و مجذور آن را حساب می کنیم و عدد زیر جذر را با آن مقایسه می کنیم و محدوده ای که جذر در آن قرار دارد را انتخاب می کنیم.

۳- جدولی تشکیل داده و در محدوده انتخابی عدد های متوالی که فاصله آنها ۰.۱ است را نوشته و مجذور آنها را حساب می کنیم و عدد زیر رادیکال را با مجذرو ها مقایسه می کنیم و مشخص می کنیم که جذر به کدام عدد نزدیکتر است.

مثال : جذر عدد ۱۲ را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

می خواهیم جذر تقریبی ۱۲ را حساب کنیم. مجذورهای کامل قبل و بعد از ۱۲ را تعیین می کنیم.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ ۴}}{\sqrt{۱۶}} > \sqrt{۱۲} > \underset{\substack{\downarrow \\ ۳}}{\sqrt{۹}}$$

یعنی $\sqrt{۱۲}$ بین ۳ و ۴ قرار دارد. عدد وسط بین ۳ و ۴ عدد ۳/۵ است.

مجذور ۳/۵ می شود ۱۲/۲۵ که از ۱۲ بیش تر است پس $\sqrt{۱۲}$ از ۳/۵ کوچک تر است. حال مجذور عددهای ۳/۴ و ۳/۳ و..... را بررسی می کنیم. عددی که مجذورش به ۱۲ نزدیک تر باشد، جواب است

عدد	۳	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/۴
مجذور	۹	۹/۶۱	۱۰/۲۴	۱۰/۸۹	۱۱/۵۶

$\Rightarrow \sqrt{۱۲} \cong ۳/۴$

اگر بخواهیم جذر ۱۲ را تا دو رقم اعشار حساب کنیم از عدد وسط ۳/۴ و ۳/۵ یعنی مجذور ۳/۴۵ شروع کرده و مراحل را مانند قبل تکرار می کنیم. جذر ۱۲ از ۳/۴۵ بزرگ تر است.

$(۳/۴۵)^۲=۱۱/۹۰$

عدد	۳/۴۶	۳/۴۷
مجذور	۱۱/۹۷	۱۲/۰۴

$\Rightarrow \sqrt{۱۲} \cong ۳/۴۶$

نمایش اعداد رادیکالی روی محور :

برای ساختن پاره خطی به طول یک عدد رادیکالی($\sqrt{a}$)، از رابطه فیثاغورس استفاده می کنیم. در شکل زیر برخی عدد های رادیکالی مشخص شده است. بعد از ساختن عدد رادیکالی، دهانه ی پرگار را به اندازه عدد مورد نظر باز کرده و نوک پرگار را در در مبدا قرار می دهیم و دایره ای رسم می کنیم این دایره محور را در دو نقطه $\sqrt{a}$و$-\sqrt{a}$ قطع می کند.

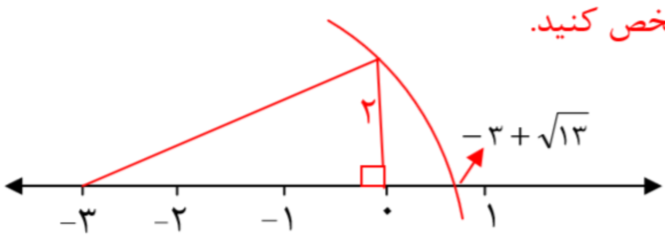
◀**مثال :جای عدد $-۳+\sqrt{۱۳}$ را روی محور مشخص کنید.**

الف) نقطه شروع ۳-

ب) جهت رسم مثلث +

ج) ضلع های مثلث ۲ و ۳

$۲^۲+۳^۲=۹+۴=۱۳$



- ✓ **نکته:** اگر به عدد رادیکالی، عددی اضافه شود، ابتدا عدد را روی محور مشخص می کنیم و بعد مانند بالا رادیکال را مشخص می کنیم.

- ✓ **ضرب رادیکال ها:** $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

مثال $\sqrt{۲۵ \times ۸۱} = \sqrt{25} \times \sqrt{81} = ۵ \times ۹ = ۴۵$

- ✓ **تقسیم رادیکال ها:** $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

مثال : $\sqrt{\frac{۱۰۰}{۶۴}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{64}} = \frac{۱۰}{۸}$

تمرین ها:

✡ درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) نصف $۲^{۱۰}$ مساوی $۲^{۵}$ می باشد.

ب) حاصل $-۳^{۲}$ برابر $+۹$ است.

ج) حاصل $(۳^{۴})^{۵}$ برابر با $۳^{۲۰}$ می باشد.

د) ۷ برابر $۷^{۹}$ مساوی $۷^{۱۰}$ است.

ط) $۵^{۲} + ۳^{۲} = (۳+۵)^{۲}$

هـ) یک به توان هر عدد طبیعی برسد، حاصل خود عدد می شود.

و) حجم مکعبی به ضلع ۳a برابر ۲۷a می باشد.

ز) عبارت $۴^{x-۳}$ را می توان به صورت $۴^{x} \div ۴^{۳}$ نوشت.

ح) حاصل $۲^{۷} + ۲^{۷}$ می شود $۲^{۱۴}$.

ی) ۹ برابر $۳^{۴}$ مساوی $۲۷^{۴}$ می باشد.

ص) حاصل عبارت $(۵^{۴})^{۲}$ با $۵^{۴^{۲}}$ برابر است.

☆ نقطه‌ی مشخص شده به کدام عدد نزدیک تر است؟

$\sqrt{۸۱} \cong$ ، $\sqrt{۳۴} \cong$ ، $\sqrt{۲۶} \cong$ ، $\sqrt{۳۹} \cong$

✡ حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$۳^{۶} + ۳^{۶} + ۳^{۶} =$

$۶^{۲^{۳}} \times ۷^{۸} =$

$(۴^{۲})^{۳} =$

$(-۲۰)^{۹} \div ۴^{۹} =$

$۸ \times ۵^{۳} =$

$۱۲۵ \times ۵^{۶} =$

$(-۷)^{۱۳} \times (-۳)^{۱۳} =$

$۲^{۵} \times ۱۰^{۷} \times ۵^{۵} =$

$۳۲ \times ۱۶ =$

$(۳۰^{۸} \div ۵^{۸}) \times ۶^{۳} =$

$۲^{۸} + ۲^{۸} =$

$۴^{۳} \times ۲۰^{۱۷} \times ۵^{۳} =$

فصل هشتم(آمار و احتمال)

علم آمار: عمل جمع آوری ، سازماندهی و تحلیل و تفسیر اطلاعات

- ✓ داده ها را با چوب خط سرشماری و در جدول داده ها سازماندهی می کنند.
- ✓ با توجه به موضوع و هدف آمارگیری ، نمودار داده ها را رسم می کنند:
- ✓ **نمودار میله ای یا ستونی:** برای مقایسه تعداد داده ها و تعیین بیشترین و کمترین داده
- ✓ **نمودار خط شکسته:** برای نمایش تغییرات در یک مدت زمان مشخص مثل تغییرات دمای اتاق در یک شبانه روز
- ✓ **نمودار تصویری:** برای مقایسه داده های تقریبی و نمایش اعداد خیلی بزرگ با کمک نمادها : نمایش جمعیت یک شهر
- ✓ **نمودار دایره ای :** برای نمایش درصدی داده ها (نمایش سطح زیر کشت یک زمین کشاورزی) یا نمایش نسبت فراوانی هر یک از دسته ها به تعداد کل داده ها.

دسته بندی داده ها

- ✓ **فراوانی داده** : به تعداد دفعات تکرار یک داده ، فراوانی داده می گویند.
- ✓ **دامنه تغییرات:** اختلاف بیش ترین و کمترین داده را دامنه تغییرات می گویند.
- ✓ **تعداد دسته ها:** این تعداد بستگی به تعداد داده ها و انتخاب ما دارد.
- ✓ **طول دسته:** با تقسیم دامنه تغییرات به تعداد دسته ها طول دسته بدست می آید.
- ✓ **حدود دسته ها :** با توجه به کمترین و بیشترین داده و طول هر دسته، حدود دسته ها بدست می آید.
- ✓ **نکته : جمع کل فراوانی ها با تعداد داده ها برابر است.**

میانگین دقیق داده ها:

از تقیسم مجموع داده ها به تعداد کل داده ها ، میانگین داده ها بدست می آید.

$$\overline{X} = \frac{s}{n}$$

میانگین تقریبی داده ها:

در این حالت، میانگین هر دسته یا مرکز هر دسته را بدست آورده ودر فراوانی آن دست ضرب می کنیم و مجموع تمام اعداد را بر تعداد کل داده ها تقسیم می کنیم.

آمار و احتمال:

انواع پیشامد ها:

قطعی: نتیجه این نوع پیشامد به طور قطع پیش از وقوع آن مشخص است.

تصادفی: نتیجه این نوع پیشامد پیش از وقوع آن به طور قطع مشخص نیست.

احتمال وقوع یک پیشامد:

- ✓ حالت هایی که احتمال آنها یکی است، هم شانس می باشند.
- ✓ نسبت تعداد حالات مطلوب به تعداد کل حالت های ممکن
- ✓ پیشامدی غیر ممکن است ، احتمال وقوع آن صفر است .
- ✓ پیشامدی که قطعی یا حتمی است ، احتمال وقوع آن یک است.
- ✓ احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی، بین صفر و یک است.
- ✓ مجموع احتمال رخ دادن یک پیشامد و احتمال رخ ندادن پیشامد برابر یک است.
- ✓ تعداد کل حالت های ممکن یک پیشامد از طریق نمودار درختی و جدول ضرب حالت ها قابل دستیابی می باشد.
- ✓ نکته مهم: ا تعداد کل حالت های رخ دادن پیشامدی مستقل برابر حاصلضرب تعداد حالت های هر پیشامد می باشد.

◀**مثال :** یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که فرد بیاید چه قدر است؟

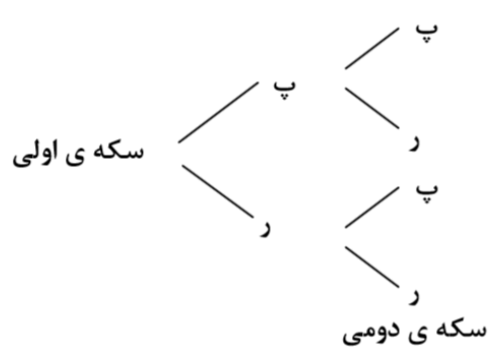
(۵ و ۳ و ۱) ، ۳= تعداد حالت های مطلوب

(۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱) ، ۶= همه ی حالت ها

◀**مثال :** دو سکه را باهم پرتاب کرده ایم. تمام حالت های ممکن را بنویسید.

سکه ی اولی	(رو)	(پشت)	(رو)	(پشت)
سکه ی دومی	(رو)	(رو)	(پشت)	(پشت)

نمودار درختی



مثال: سه سکه را می اندازیم.

الف- تعداد کل حالت ها ممکن را بدست آورید و نمودار درختی آن را رسم کنید.

ب- احتمال اینکه حداقل دو بار رو بیاید. $\frac{۴}{۸}$

ج- احتمال اینکه حداکثر دو بار رو بیاید. $\frac{۷}{۸}$

د- احتمال اینکه سکه اول رو بیاید. $\frac{۴}{۸}$

مثال۲: خانواده ای ۵ فرزند دارد. احتمال اینکه این خانواده حداکثر چهار پسر داشته باشد را بدست آورید. $\frac{۳۱}{۳۲}$

مثال۳: در کیسه $\frac{۱}{۲}$ مهره ها قرمز، $\frac{۱}{۴}$ مهره ها سبز و $\frac{۱}{۲۴}$ مهره ها سفید و $\frac{۵}{۲۴}$ مهره ها زرد است. اگر یک مهره به تصادف بیرون آوریم ، احتمال بیرون آمدن کدام رنگ ها بیشتر است؟ چرا؟ رنگ قرمز. زیر نسبت آن بزرگتر است.

مثال : میانگین اعداد زیر را به دست آورید.

۹و ۱۱و ۲۰و ۱۸و ۱۲/۵و ۱۶و ۱۴/۵و ۱۳و ۲۰و ۸و ۲و ۱۹و ۱۲و ۱۰/۵و ۱۴و ۱۷

نکته : $\frac{\text{انتهای دسته + ابتدای دسته}}{۲}$ = مرکز دسته

حدود دسته	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز× فراوانی
$۰ \le x < ۵$	/	۱	۲/۵	۲/۵
$۵ \le x < ۱۰$	//	۲	۷/۵	۱۵
$۱۰ \le x < ۱۵$	~~////~~ //	۷	۱۲/۵	۸۷/۵
$۰/۵ \le x \le ۲۰$	~~////~~ /	۶	۱۷/۵	۱۰۵
جمع	-	۱۶	-	۲۱۰

$$\text{میانگین} = \frac{۲۱۰}{۱۶} \cong ۱۳/۱$$

تمرین ها

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) عدد ۱۰ مربوط به دسته ی $۵ \le x < ۱۰$ می باشد.

ب) طول دسته ی $۱۴۵ \le x < ۱۶۰$ مساوی ۱۵ است.

ج) دامنه ی تغییرات داده های ۱۵ و ۴ و ۸- و ۹ برابر ۲۳ است.

د) اگر ~~////~~ // نمایش چوب خط یک دسته باشد، آن گاه فراوانی این دسته ۶ است.

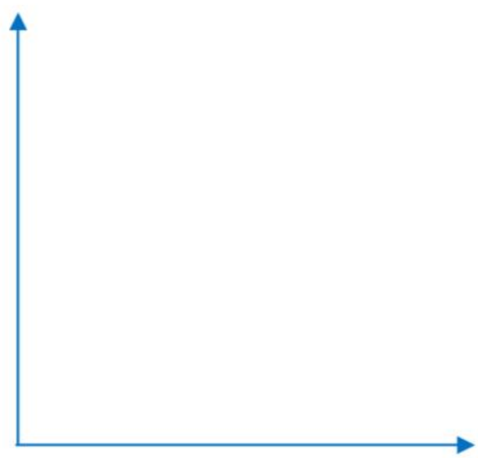
هـ) مرکز دسته ی $۱۰ \le x < ۱۶$ برابر با ۱۳ است.

و) فاصله ی بین هر دو مرکز دسته های متوالی، همان طول دسته است.

ز) نمودار تصویری برای مقایسه ی تعداد به کار می رود.

☆ الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) نمودار ستونی مربوط به جدول را رسم کنید.



حدود دسته ها	خط نشان	فراوانی
$۱۳۰ \le x < ۱۴۰$	///	۳
$۱۴۰ \le x < ۱۵۰$	////	
$\le x <$		۵
		۲
$۱۷۰ \le x \le ۱۸۰$	~~////~~ /	

☆ معدل نمرات نیما در ۸ درس ۱۸ شده است. اگر پس از اعتراض ۱/۵ نمره به درس ریاضی و ۰/۵ نمره به درس علوم او اضافه شود، میانگین جدید چه قدر است؟

☆ میانگین ۴ عدد ۲۹ و میانگین ۶ عدد ۳۳ می باشد. میانگین کل عددها چه قدر است؟

مجموع ۴ عدد = ...

مجموع ۶ عدد = ...

⟹ مجموع کل = ... ⟹ میانگین کل = ...

فصل نهم(دایره)

دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله ی آن ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره مقدار ثابتی می باشد که به این فاصله ثابت شعاع دایره می گویند.

حالت های مختلف خط و دایره نسبت به هم:

- ✓ هیچ نقطه مشترکی ندارند
- ✓ یک نقطه مشترک دارند. در این حالت خط بر دایره مماس است.
- ✓ دو نقطه مشترک دارد که به پاره خطی ایجاد شده وتر می گویند.

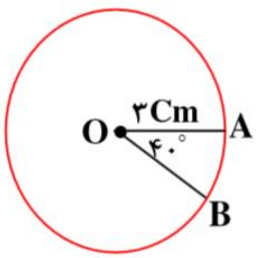
نکات مهم:

- شعاع دایره در نقطه تماس بر خط تماس عمود است.
- ✓ از هر نقطه خارج دایره؛ فقط دو مماس می توان بر دایره رسم کرد به طوری که طول مماس ها با یکدیگر برابرند.
- ✓ هر چهار ضلعی که ضلع های آن بر دایره مماس باشند، مجموع دو به دوی ضلع های مقابل با هم برابرند.
- ✓ از هر نقطه روی دایره فقط یک مماس بر دایره رسم می شود.
- ➢ **وتر دایره:** پاره خطی که دو نقطه مختلف دایره را به هم وصل می کند.
- ➢ وتری از دایره که از مرکز دایره می گذرد ، **قطر دایره** نامیده می شود.
- ✓ تعداد قطر های دایره بی شمار می باشد.
- ✓ پاره خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود ، آن را نصف می کند.
- ✓ پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می کند، بر آن عمود است.
- **زاویه مرکزی:** زاویه ای که راس آن مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره می باشد.
- ✓ اندازه هر زاویه مرکزی با اندازه کمان رو به روی آن مساوی است.
- ✓ نسبت اندازه هر کمان به ۳۶۰ درجه با نسبت طول کمان به محیط دایره برابر است.
- در صورتی که در یک دایره، اندازه ی دو وتر با هم برابر باشند، کمان های نظیر آنها با هم برابرند.
- در صورتی که دریک دایره اندازه دو کمان با هم برابر باشند، وترهای نظیر آنها با یکدیگر برابرند.

❋ محاسبه طول کمانی از دایره :

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{۳۶۰}$$

◀ **مثال** : محمد می داند زاویه $A\hat{O}B = ۴۰^\circ$ و شعاع دایـره ۳cm اسـت. او مـی خواهـد طـول کمان AB را به دست آورد. او را راهنمایی کنید.



$۳۶۰ \div ۴۰ = ۹$

عدد پی × قطر = محیط دایره

محیط دایره = ۶×۳/۱۴=۱۸/۸۴

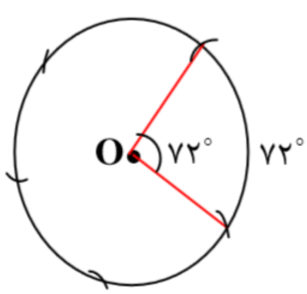
$\overset{\frown}{AB}$ طول کمان = $\frac{۱}{۹} \times ۱۸/۸۴ \cong ۲/۱۰$

رسم پنج ضلعی منتظم با کمک نقاله و پرگار:

با کمک نقاله زاویه مرکزی به اندازه ۷۲ درجه رسم کرده و وتر بوجود آمده توسط زاویه را نامگذاری کرده و دهانه پرگار را به اندازه وتر بوجود آمده باز کرده و نوک پرگار را روی یکی از این نقاط گذاشته و کمان های پی در پی می زنیم و سپس محل برخورد کمان ها به هم وصل می کنیم.

◀ **مثال : دایره مقابل را به ۵ کمان مساوی تقسیم کنید.**

زاویه مرکز و کمان مقابل به آن $۳۶۰ \div ۵ = ۷۲$



حالت های مختلف دو وتر دایره نسبت به هم:

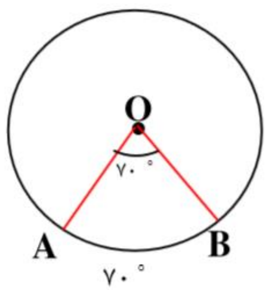
- ✓ روی دایره یکدیگر را قطع می کنند. در این حالت خالت زاویه بین دو وتر را زاویه محاطی می گویند.
- ✓ داخل دایره یکدیگر را قطع می کنند. اندازه زاویه بوجود آمده برابر نصف مجموع اندازه دو کمان بین دو وتر است.
- ✓ بیرون دایره یکدیگر را قطع می کنند. اندازه زاویه بوجود آمده برابر نصف تفاضل اندازه کمان بزرگتر از کمان کوچکتر بین دو وتر است.
- ✓ **زاویه محاطی:** زاویه ای که راس آن روی دایره است و ضلع های آن دو وتر از دایره است.

- ✓ **اندازه زاویه محاطی برابر نصف کمان مقابل آن می باشد. -**
- ✓ اندازه زاویه محاطی رو به روی قطر دایره ، زاویه قائمه است.

❋ **زاویه مرکزی :** هر زاویه که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع های آن شعاع هـای دایـره باشـند، زاویه مرکزی نامیده می شود.

❋ اندازه ی هر زاویه مرکزی با اندازه ی کمان مقابل آن مساوی است.

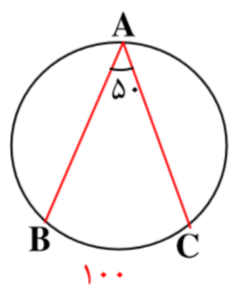
$$\hat{O} = \overset{\frown}{AB} = ۷۰^\circ$$



❋ **زاویه محاطی :** زاویه محاطی زاویه ای اسـت کـه رأس آن روی محـیط دایـره و ضـلع هـای آن وترهای دایره باشند.

❋ اندازه ی هر زاویه محاطی با نصف کمان مقابل آن برابر است.

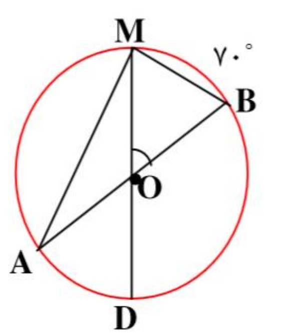
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰^\circ$$



نکته ۱) : زاویه های محاطی رو به رو به یک کمان باهم مساوی اند.

نکته ۲) : اندازه ی زاویه محاطی رو به رو به قطر دایره ۹۰ درجه (قائمه) است.

◀ **مثال :** در شکل زیر O مرکز دایره و $\overline{AB}$ قطر دایره اسـت. انـدازه ی زاویـه هـا و کمـان هـای خواسته شده را بنویسید.



مرکزی $M\hat{O}B = \widehat{MB} = ۷۰^\circ$

محاطی $\hat{A} = \frac{\widehat{MB}}{۲} = \frac{۷۰}{۲} = ۳۵^\circ$

$$\widehat{AM} = ۱۸۰ - ۷۰ = ۱۱۰$$

$$A\hat{M}B = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰^\circ$$

$$O\hat{M}B = \frac{\widehat{BD}}{۲} = \frac{۱۱۰}{۲} = ۵۵^\circ$$

تمرین ها:

✡ جملات زیر را کامل کنید.

الف) شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس .... است.

ب) برای تقسیم دایره به ۸ کمان مساوی از زاویه ی .... درجه ی مرکزی استفاده می‌کنیم.

ج) اگر فاصله ی خطی تا مرکز دایره با شعاع دایره مساوی باشد، خط بر دایره .... می باشد.

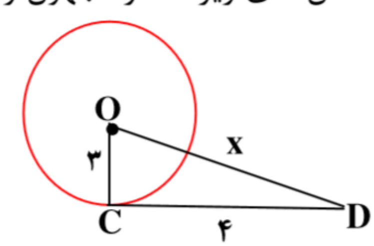
د) زاویه ی محاطی رو به رو به کمان ۱۲۴ درجه مساوی .... درجه است.

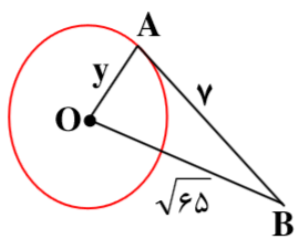
هـ) پاره خطی که مرکز دایره را به .... وتر وصل می کند، بر آن وتر عمود است.

و) در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، خط بر دایره .... است.

ز) زاویه محاطی رو به رو به قطر دایره مساوی .... درجه است.

☆ در شکل های زیر مقدار مجهول را به دست آورید (O مرکز دایره است)



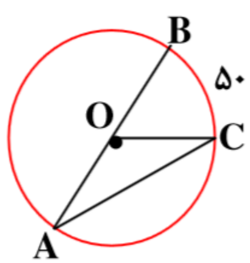


☆ در شکل زیر O مرکز دایره و $\overset{\frown}{BC} = ۵۰^\circ$ است. اندازه ی زاویه ها و کمان های خواسته شده را بنویسید.

$\hat{A} =$

$\overset{\frown}{AC} =$

$B\hat{O}C =$



☆ درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) هر زاویه که رأس آن روی محیط دایره باشد، زاویه محاطی نامیده می شود.

ب) زاویه مرکز نصف کمان مقابل آن است.

ج) اگر فاصله ی خطی تا مرکز دایره ای نصف شعاع دایره باشد، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.

د) در هر دایره، زاویه های محاطی رو به رو به یک کمان باهم مساوی اند.